

B) Polynomické, racionální lomené a mocninné funkce

§1. Konstantní a lineární funkce

Def.: a) Necht' $b \in \mathbf{R}$. Funkci $f: y = b$ nazveme konstantní funkcí.
b) Necht' $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$. Pak funkci $f: y = ax + b$ nazveme lineární funkcí.

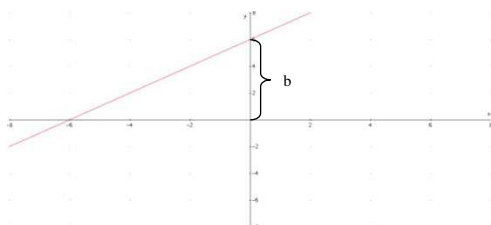
Pozn.: Velmi často se konstantní funkce chápe jako speciální případ lineární funkce pro $a = 0$.

Pozn.: a) Definičním oborem konstantní i lineární funkce je $\mathbf{R}$.
Oborem hodnot konstantní funkce je $\{b\}$.
Oborem hodnot lineární funkce je $\mathbf{R}$.
b) Grafem konstantní funkce je přímka rovnoběžná s osou x .
Grafem lineární funkce je přímka, která není rovnoběžná s osou x ani s osou y .

V.1.1.: Necht' $f: y = ax + b$, $a \neq 0$ je lineární funkce. Pak platí:

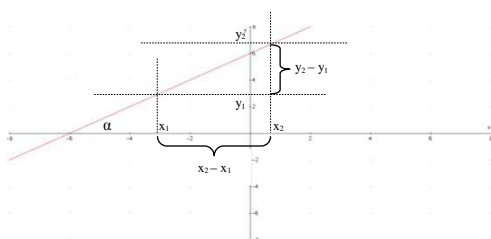
- 1) $b = 0 \Rightarrow f$ je lichá
 $b \neq 0 \Rightarrow f$ není ani sudá, ani lichá
 - 2) $a > 0 \Rightarrow f$ je rostoucí
 $a < 0 \Rightarrow f$ je klesající
 - 3) f není ani shora, ani zdola omezená
 - 4) f nemá extrém
 - 5) f není periodická
- [Dk.:]

Pozn.: Geometrický význam koeficientů a, b u rovnice lineární funkce $f: y = ax + b$:



$$f(0) = a \cdot 0 + b = b$$

b = hodnota funkce v bodě 0



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

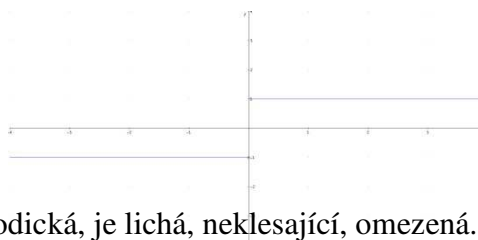
a ... směrnice přímky dané rovnicí $y = ax + b$

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

α ... směrový úhel

Př.: Funkce signum:

$$y = \operatorname{sgn} x$$
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro všechna } x \in \mathbf{R}^- \\ 0 & \text{pro } x = 0 \\ 1 & \text{pro všechna } x \in \mathbf{R}^+ \end{cases}$$
$$H(f) = \{-1; 0; 1\}$$



Funkce signum má neostře extrém, není periodická, je lichá, neklesající, omezená.

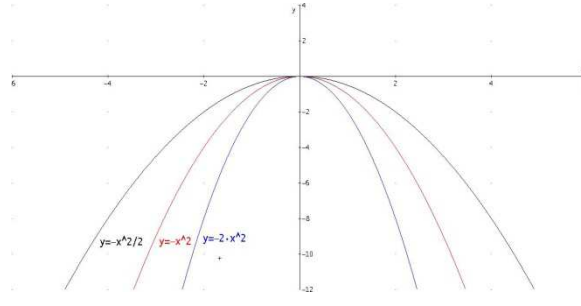
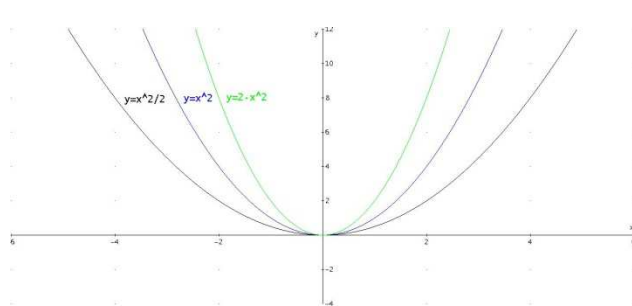
§2. Kvadratická funkce

Def.: Necht' $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$. Pak $f: y = ax^2 + bx + c$ nazýváme kvadratickou funkcí.

Pozn.: a) Definičním oborem kvadratické funkce je $\mathbf{R}$.
b) Grafem kvadratické funkce je parabola.

V.2.1.: Necht' $f: y = ax^2$, $a \neq 0$ je kvadratická funkce. Pak platí:

	$\underline{a > 0}$	$\underline{a < 0}$
1) obor hodnot	$H(f) = \mathbf{R}_0^+$	$H(f) = \mathbf{R}_0^-$
2) parita	sudá	sudá
3) monotónnost	$x \in (-\infty; 0) \dots$ klesající $x \in \langle 0; \infty) \dots$ rostoucí	$x \in (-\infty; 0) \dots$ rostoucí $x \in \langle 0; \infty) \dots$ klesající
4) omezenost	zdola omezená shora neomezená	zdola neomezená shora omezená
5) extrém	ostré minimum v bodě $x_0 = 0$	ostré maximum v bodě $x_0 = 0$
6) periodicit	neperiodická	neperiodická



[Dk.:]

Pozn.: Vlastnosti obecné kvadratické funkce $f: y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ vyšetřujeme doplněním na úplný čtverec:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

V.2.2.: Necht' $f: y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ je kvadratická funkce. Pak platí:

	$\underline{a > 0}$	$\underline{a < 0}$
1) obor hodnot	$H(f) = \langle c - \frac{b^2}{4a}; \infty \rangle$	$H(f) = (-\infty; c - \frac{b^2}{4a})$
2) parita	obecně není sudá ani lichá	obecně není sudá ani lichá
3) monotónnost	$x \in (-\infty; -\frac{b}{2a}) \dots$ klesající $x \in \langle -\frac{b}{2a}; \infty) \dots$ rostoucí	$x \in (-\infty; -\frac{b}{2a}) \dots$ rostoucí $x \in \langle -\frac{b}{2a}; \infty) \dots$ klesající
4) omezenost	zdola omezená shora neomezená	zdola neomezená shora omezená
5) extrém	ostré min. v bodě $x = -\frac{b}{2a}$	ostré max. v bodě $x = -\frac{b}{2a}$
6) periodita	neperiodická	neperiodická

Pozn.: Grafy parametrického systému funkcí $f: y = ax^2 + bx + c$

Parametr a : $a > 0$ parabola otevřená nahoru

$a < 0$ parabola otevřená dolů

vliv na roztažení paraboly

Parametr c : parabola se posouvá po ose y

Parametr b : posun po ose x , ale i po ose y

§3. Polynomy

Def.: Polynomem (reálným polynomem s 1 proměnnou) nazýváme každý výraz $P(x)$ tvaru: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, kde $a_i \in \mathbf{R}$; $i \in \{0; 1; \dots; n\}$, $n \in \mathbf{N}$.

Čísla a_i se nazývají koeficienty polynomu $P(x)$.

Sčítance $a_i x^i$ nazýváme členy polynomu $P(x)$.

Je-li $a_n \neq 0$, číslo n se nazývá stupeň polynomu a označujeme $n = \text{st}(P(x))$.

Je-li $a_i = 0$ pro všechna $i \in \{0; 1; \dots; n\}$, pak klademe $\text{st}(P(x)) = -\infty$ a $P(x)$ se nazývá nulovým polynomem. Označujeme jej $0(x)$.

Je-li $a_n = 1$, nazývá se $P(x)$ normovaným polynomem.

Def.: Polynom stupně 0 nazýváme konstantní.

Polynom stupně 1 nazýváme lineární.

Polynom stupně 2 nazýváme kvadratický.

Polynom stupně 3 nazýváme kubický.

Pozn.: a) Množinu všech polynomů proměnné x označíme $\mathbf{R}[x]$.

Množinu všech polynomů proměnné x stupně nejvýše n značíme $\mathbf{R}_n[x]$.

b) Každému polynomu stupně n lze přiřadit uspořádanou $(n + 1)$ -tici jeho koeficientů: $[a_n; a_{n-1}; \dots; a_1; a_0]$ Toto zobrazení je prosté.

c) Polynomy $P(x)$ a $Q(x)$ se rovnají a zapisujeme $P(x) = Q(x)$, právě tehdy, když jsou oba stejného stupně a shodují se koeficienty odpovídajících si členů.

V.3.1.: Necht' $P(x)$ a $Q(x) \in \mathbf{R}[x]$ (jsou polynomy). Pak $P(x) + Q(x)$; $P(x) - Q(x)$; $P(x) \cdot Q(x)$ jsou rovněž polynomy a platí:

$$\text{st}(P(x) \pm Q(x)) \leq \max \{ \text{st}(P(x)), \text{st}(Q(x)) \}$$

$$\text{st}(P(x) \cdot Q(x)) = \text{st}(P(x)) + \text{st}(Q(x))$$

Pozn.: a) Na množině $\mathbf{R}[x]$ definujeme sčítání a odčítání obvyklým způsobem: sčítáme nebo odčítáme koeficienty u odpovídajících si mocnin proměnné x .

b) Při násobení násobíme každý člen jednoho polynomu každým členem druhého polynomu a vzniklé součiny sečteme.

V.3.2.: Věta o dělení dvou polynomů se zbytkem:

Necht' $A(x), B(x) \in \mathbf{R}[x]$ a $B(x) \neq 0(x)$. Pak existuje právě 1 dvojice polynomů $Q(x), R(x) \in \mathbf{R}[x]$ tak, že platí:

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x), \text{ kde } R(x) = 0(x) \text{ nebo } \text{st}(R(x)) < \text{st}(B(x))$$

Def.: Polynom $Q(x)$ z předchozí věty se nazývá neúplný podíl a $R(x)$ zbytek při dělení polynomu $A(x)$ polynomem $B(x)$.

Def.: Necht' $A(x), B(x) \in \mathbf{R}[x]$. Řekneme, že polynom $B(x)$ dělí polynom $A(x)$, právě když existuje polynom $C(x) \in \mathbf{R}[x]$ tak, že platí: $A(x) = B(x) \cdot C(x)$. Zapisujeme $B(x) \mid A(x)$.

Pozn.: a) Zbytek při dělení polynomu $A(x)$ polynomem $B(x)$ je nulový polynom $0(x)$.

b) Jestliže $B(x) \mid A(x)$ a $\text{st}(A(x)) \neq 0 \Rightarrow \text{st}(B(x)) \leq \text{st}(A(x))$.

c) Jestliže $\text{st}(B(x)) = 0 \Rightarrow B(x) \mid A(x)$.

d) Jestliže $\text{st}(A(x)) = \text{st}(B(x)) \wedge \exists c \in \mathbf{R} - \{0\} : A(x) = B(x) \cdot c \Rightarrow B(x) \mid A(x)$.

e) Jestliže $B(x) \mid A(x) \wedge \exists c \in \mathbf{R} - \{0\} \Rightarrow (B(x) \cdot c) \mid A(x)$.

Kořeny polynomu

Def.: Necht' $P(x) \in \mathbf{R}[x]$, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Necht' $c \in \mathbf{R}$ je libovolné číslo.

Hodnotou polynomu $P(x)$ v čísle (v bodě) c nazýváme reálné číslo $P(c)$.

$$P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_2 c^2 + a_1 c + a_0.$$

Číslo $c \in \mathbf{R}$ nazveme kořenem polynomu $P(x)$, právě když $P(c) = 0$.

Pozn.: a) Je-li $P(x) = 0(x)$, pak jeho kořenem je každé reálné číslo.

b) Je-li $P(x) = a_0$, $a_0 \neq 0$, pak polynom nemá žádný kořen.

c) Je-li $P(x) = a_1 x + a_0$; $a_1 \neq 0$, pak polynom má právě 1 kořen $c = -\frac{a_0}{a_1}$.

d) Hodnotu polynomu a zjištění, zda číslo c je kořenem, určujeme Hornerovým schématem.

V.3.3.: Necht' $P(x) \in \mathbf{R}[x]$. Pak platí:

Číslo $c \in \mathbf{R}$ je kořenem $P(x) \Leftrightarrow (x - c) \mid P(x)$.

Def.: Necht' $P(x) \in \mathbf{R}[x]$ a $c \in \mathbf{R}$ je jeho kořen.

Lineární polynom $(x - c)$ nazýváme kořenovým činitelem (příslušným kořenu c).

Pozn.: Podle V.3.3. je každý polynom dělitelný všemi svými kořenovými činiteli.

V.3.4.: Necht' $P(x) \in \mathbf{R}[x]$, $c \in \mathbf{R}$ je jeho kořen.

Pak existuje polynom $Q(x) \in \mathbf{R}[x]$: $P(x) = (x - c) \cdot Q(x)$.

Důsledek.: Je-li $\text{st}(P(x)) = n \geq 1$, pak $\text{st}(Q(x)) = n - 1$ a jeho koeficient u nejvyšší mocniny $(n - 1)$ -vá je a_n .

Pozn.: Koeficienty polynomu $Q(x)$ z V.3.4. určíme Hornerovým schématem. (viz 1.ročník IV. Kapitola §19). Takto lze určit i koeficienty neúplného podílu a zbytek při dělení polynomu lineárním polynomem.

Def.: Necht' $P(x) \in \mathbf{R}[x]$, $c \in \mathbf{R}$ je jeho kořen a $k \in \mathbf{N}$.

Číslo $c \in \mathbf{R}$ nazýváme k -násobným kořenem polynomu $P(x)$, právě když platí:
 $(x - c)^k \mid P(x) \wedge (x - c)^{k+1} \nmid P(x)$.

Pozn.: a) Jestliže platí $(x - c)^k \mid P(x)$, pak říkáme, že c je alespoň k -násobným kořenem polynomu $P(x)$.

a) Pro $k = 1$ neříkáme jednonásobný, ale jednoduchý kořen.

b) Někdy místo k -násobný kořen říkáme kořen násobnosti k .

V.3.5.: Necht' $P(x) \in \mathbf{R}[x]$, $c \in \mathbf{R}$ je jeho k -násobný kořen.

Pak $\exists Q(x) \in \mathbf{R}[x]$ tak, že: $P(x) = (x - c)^k \cdot Q(x) \wedge Q(c) \neq 0$

Platí to i jako ekvivalence.

Důsledek.: Je-li $\text{st}(P(x)) = n \geq 1$, $k \leq n$, pak $\text{st}(Q(x)) = n - k$ a jeho koeficient u nejvyšší mocniny $(n - k)$ -tá je a_n .

Pozn.: Koeficienty polynomu $Q(x)$ z V.3.5. určíme také Hornerových schématem, které použijeme k -krát.

V.3.6.: Každý polynom $P(x) \in \mathbf{R}[x]$, pro něj $\text{st}(P(x)) = n \geq 0$, má v množině $\mathbf{R}$ nejvýše n kořenů. ((V množině komplexních čísel $\mathbf{C}$ je právě n kořenů, počítáme-li každý kořen tolikrát, kolik je jeho násobnost.))

Pozn.: Každý kvadratický polynom má nejvýše 2 reálné kořeny.

Vietovy vztahy polynomu

Pozn.: a) Necht' x_1, x_2 jsou kořeny kvadratického polynomu $x^2 + px + q$ resp. $ax^2 + bx + c$. Pak metodou porovnání koeficientů dostáváme tzv. Vietovy vztahy pro kořeny kvadratického polynomu nebo resp. kvadratické rovnice:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= (x - x_1)(x - x_2) & ax^2 + bx + c &= a(x - x_1)(x - x_2) \\ x^1 : p &= -x_1 - x_2 \Rightarrow -p = x_1 + x_2 & x^1 : b &= a(-x_1 - x_2) \Rightarrow -b \mid a = x_1 + x_2 \\ x^0 : q &= x_1 x_2 & x^0 : c &= a(x_1 x_2) \Rightarrow c \mid a = x_1 x_2 \end{aligned}$$

b) Obdobné vztahy dostaneme i u kubického polynomu $a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ s kořeny x_1, x_2, x_3 .

$$\begin{aligned} a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 &= a_3 (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ x^2 : a_2 &= a_3 (-x_1 - x_2 - x_3) \Rightarrow -a_2 \mid a_3 = x_1 + x_2 + x_3 = \sum_{i=1}^3 x_i \\ x^1 : a_1 &= a_3 (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) \Rightarrow a_1 \mid a_3 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \\ x^0 : a_0 &= a_3 (-x_1 x_2 x_3) \Rightarrow -a_0 \mid a_3 = x_1 x_2 x_3 = \prod_{i=1}^3 x_i \end{aligned}$$

V.3.7.: Vietovy vztahy (Newtonovy vztahy):

Necht' $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ je polynom stupně n , který má v množině $\mathbf{R}$ právě n kořenů $x_1, x_2, \dots, x_n$ (každý kořen počítáme tolikrát, kolik je jeho násobnost). Pak platí:

$$\begin{aligned} -\frac{a_{n-1}}{a_n} &= x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i \\ +\frac{a_{n-2}}{a_n} &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^n x_{i_1} x_{i_2} \\ &\vdots \\ (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n} &= x_1 x_2 \dots x_k + x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_{k+1} + \dots + x_{n-k+1} x_{n-k+2} \dots x_{n-1} x_n = \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_k=1 \\ i_1 < i_2 < \dots < i_k}}^n x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \\ &\vdots \\ (-1)^n \frac{a_0}{a_n} &= x_1 x_2 x_3 \dots x_n = \prod_{i=1}^n x_i \end{aligned}$$

[Dk.:]

Pozn.: V k -tém Vietově vzorci je $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ sčítanců, každý sčítanec vznikne jako součin některých k čísel vycházejících z n -tice $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Hledání racionálních kořenů polynomů s racionálními koeficienty

Pozn.: a) Množinu všech polynomů s racionálními koeficienty označíme $\mathbf{Q}[x]$, s celými koeficienty $\mathbf{Z}[x]$.

b) Celá tato část vychází již z dokázaných tvrzení hledání racionálních kořenů algebraické rovnice v 1.ročníku, IV. Kapitola, paragraf 19.

V.3.8.: Necht' $P(x) \in \mathbf{Q}[x]$, $c \in \mathbf{R}$ je jeho kořen. Označme n nejmenší společný násobek jmenovatelů všech koeficientů polynomu $P(x)$.

Pak c je kořen polynomu $T(x) \in \mathbf{Z}[x]$, kde $T(x) = n \cdot P(x)$.

[Dk.:]

Pozn.: Podle předchozí věty lze hledání kořenů polynomů s racionálními koeficienty převést na hledání kořenů polynomů s koeficienty celými.

V.3.9.: Necht' $P(x) \in \mathbf{Z}[x]$, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbf{Z}$,

$i \in \{0; 1; \dots; n\}$. Necht' racionální číslo $c = \frac{r}{s}$, $r \in \mathbf{Z}$; $s \in \mathbf{N}$, $D(r,s) = 1$ je

kořen $P(x)$.

Pak platí: $r \mid a_0 \wedge s \mid a_n$

[Dk.: 1.ročník IV.kapitola V.19.1.]

Důsledek.: a) Je-li $c \in \mathbf{Z}$ kořenem $P(x) \in \mathbf{Z}[x]$, pak platí: $c \mid a_0$.

b) je-li $P(x) \in \mathbf{Z}[x]$ normovaný ($a_n = 1$), pak je jeho každý racionální kořen celé číslo.

V.3.10.: Necht' racionální číslo $c = \frac{r}{s}$, $r \in \mathbf{Z}$, $s \in \mathbf{N}$, $D(r,s) = 1$ je kořen $P(x) \in \mathbf{Z}[x]$.

Necht' m je pevné celé číslo.

Pak platí $(r - ms) \mid P(m)$.

[Dk.: 1.ročník IV.kapitola V.19.2.]

Pozn.: V.3.10. se užívá hlavně v polynomu pro $m = \pm 1$: $(r - s) \mid P(1)$
 $(r + s) \mid P(-1)$

Pozn.: Pomocí V.3.9. a V.3.10. lze snadno určit všechny racionální kořeny polynomu $P(x)$ s celými koeficienty:

1) Nalezneme všechny celočíselné dělitele r absolutního členu a_0 .

2) Nalezneme všechny přirozené dělitele s vedoucího členu a_n .

3) Utvoříme všechny zlomky tvaru $\frac{r}{s}$, $D(r,s) = 1$.

4) Hornerovým schématem určíme $P(1)$, příp. $P(-1), \dots$ (čísla 1, -1, ... mohou být kořeny).

5) Podle splnění podmínky $(r - s) \mid P(1)$, příp. $(r + s) \mid P(-1), \dots$ vyškrtáme ty zlomky

$\frac{r}{s}$, které nemohou být kořeny.

6) Ostatní zlomky vyzkoušíme Hornerovým schématem, zda jsou kořeny daného polynomu.

Rozklad polynomu v reálném oboru

V.3.11.: Necht' $P(x) \in \mathbf{R}[x]$, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, kde $\text{st}(P(x)) \geq 1$.

Pak $P(x)$ lze vyjádřit jako součin polynomů 1. a 2. stupně a koeficientu a_n :

$$P(x) = a_n (x - c_1)^{k_1} (x - c_2)^{k_2} \dots (x - c_l)^{k_l} (x^2 + p_1 x + q_1)^{r_1} (x^2 + p_2 x + q_2)^{r_2} \dots (x^2 + p_s x + q_s)^{r_s},$$

kde $c_1, c_2, \dots, c_l$ jsou všechny jeho reálné různé kořeny s násobnostmi $k_1, k_2, \dots, k_l \in \mathbf{N}$;

$p_1, p_2, \dots, p_s$ a $q_1, q_2, \dots, q_s$ jsou reálná čísla, $r_1, r_2, \dots, r_s \in \mathbf{N}$, $s \in \mathbf{N}$.

Polynomy $(x^2 + p_1 x + q_1), (x^2 + p_2 x + q_2), \dots, (x^2 + p_s x + q_s)$ jsou kvadratické polynomy se záporným diskriminantem. Uvedený rozklad je až na pořadí činitelů jednoznačný a platí $\text{st}(P(x)) = k_1 + k_2 + \dots + k_l + 2(r_1 + r_2 + \dots + r_s)$.

Jestliže $a_l \pm ib_1, a_2 \pm ib_2, \dots, a_s \pm ib_s$ jsou všechny navzájem různé dvojice komplexně sdružených kořenů s násobnostmi $r_1, r_2, \dots, r_s$, $P(x)$ můžeme psát ve tvaru:

$$P(x) = a_n (x - c_1)^{k_1} (x - c_2)^{k_2} \dots (x - c_l)^{k_l} [(x - a_1)^2 + b_1^2]^{r_1} [(x - a_2)^2 + b_2^2]^{r_2} \dots [(x - a_s)^2 + b_s^2]^{r_s}.$$

[Dk.:].

Důsledek.: Polynom lichého stupně má alespoň 1 reálný kořen.

Polynom má sudý počet komplexních kořenů.

Pozn.: Vyjádření polynomu $P(x)$ ve V.3.11. se nazývá rozklad polynomu v reálném oboru.

V.3.12.: Necht' $P(x) \in \mathbf{R}[x]$. Necht' $c_1, c_2, \dots, c_l$ jsou všechny jeho navzájem různé reálné kořeny s lichou násobností. Necht' $c_1 < c_2 < \dots < c_l$. Pak v intervalech $(-\infty, c_1), (c_1, c_2), (c_2, c_3), \dots, (c_{l-1}, c_l), (c_l, \infty)$ polynom $P(x)$ je stále nekladný nebo nezáporný. Jsou-li dány 2 sousední intervaly, pak v jednom z nich je $P(x)$ nekladný a v druhém nezáporný.

[Dk.:]

Největší společný dělitel dvou polynomů

Def.: Necht' $A(x), B(x) \in \mathbf{R}[x]$. Polynom $C(x) \in \mathbf{R}[x]$ se nazývá společným dělitelem polynomů $A(x), B(x)$, právě když platí: $C(x) \mid A(x) \wedge C(x) \mid B(x)$.
Polynom $D(x) \in \mathbf{R}[x]$ se nazývá největší společný dělitel polynomů $A(x), B(x)$, který označujeme $\text{NSD}(A(x), B(x))$, nebo $D(A(x), B(x))$ právě tehdy, když platí:
1) $D(x) \mid A(x) \wedge D(x) \mid B(x)$.
2) $\forall C(x) \in \mathbf{R}[x] : C(x) \mid A(x) \wedge C(x) \mid B(x) \Rightarrow C(x) \mid D(x)$.

V.3.13.: Ke každým dvěma polynomům $A(x), B(x) \in \mathbf{R}[x]$, z nichž aspoň 1 je nenulový, existuje jejich největší společný dělitel.

[Dk.!: Konstruktivní – Euklidův algoritmus:

a) $A(x) = 0(x) \Rightarrow D(A(x), B(x)) = B(x)$.

b) $\text{st}(A(x)) \geq \text{st}(B(x)) \geq 0$.

Proveďme následující posloupnost dělení se zbytkem:

$$A(x) = B(x) \cdot Q_1(x) + R_1(x), \quad \text{st } R_1(x) < \text{st } B(x)$$

$$B(x) = R_1(x) \cdot Q_2(x) + R_2(x), \quad \text{st } R_2(x) < \text{st } R_1(x)$$

$$R_1(x) = R_2(x) \cdot Q_3(x) + R_3(x), \quad \text{st } R_3(x) < \text{st } R_2(x)$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$R_{n-2}(x) = R_{n-1}(x) \cdot Q_n(x) + R_n(x), \quad \text{st } R_n(x) < \text{st } R_{n-1}(x)$$

$$R_{n-1}(x) = R_n(x) \cdot Q_{n+1}(x), \quad R_{n+1}(x) = 0(x)$$

Toto dělení ukončíme, až dostaneme zbytek – nulový polynom. Vzhledem k nerovnostem na pravé straně tento nulový zbytek existuje.

Poslední nenulový zbytek, tzn. polynom $R_n(x) = \text{NSD}(A(x), B(x))$.]

Pozn.: a) Největších společných dělitelů 2 polynomů je více: Jestliže $R_n(x)$ je NSD, pak každý polynom $c \cdot R_n(x)$; $c \in \mathbf{R} - \{0\}$ je také největším společným dělitelem.

b) Ale normovaný největší společný dělitel 2 polynomů existuje právě 1 (koeficient u nejvyšší mocniny je roven 1). Tento NSD se označuje $(A(x), B(x))$.

Def.: Necht' $A(x), B(x) \in \mathbf{R}[x]$. Polynomy $A(x), B(x)$ nazýváme nesoudělné, právě tehdy když platí: normovaný největší společný dělitel se rovná 1 nebo $(\text{NSD}(A(x), B(x)) = c$; $c \in \mathbf{R} - \{0\}$).

Pozn.: Z Euklidova algoritmu je patrné, že je jedno, zda k výpočtu používáme zbytek $R_i(x)$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, nebo jeho nenulový násobek. Lze tedy v kterémkoliv kroku Euklidova algoritmu kterýkoliv polynom násobit kterýmkoliv nenulovým číslem. Znehodnotí se tím neúplný podíl, ale normovaný největší společný dělitel se nezmění.

Derivace polynomu

Pozn.: Derivaci funkce si zavedeme ve 3. ročníku. Zde se pouze seznámíme s derivací polynomu, kterou využijeme při hledání vícenásobných kořenů polynomu. Všechny věty si zde uvedeme bez důkazů.

Def.: Necht' $P(x) \in \mathbf{R}[x]$, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$,
Derivací polynomu $P(x)$ rozumíme polynom $P'(x)$, definovaný takto:

$$P'(x) = \begin{cases} 0, & \text{je-li } \text{st}(P(x)) \leq 0 \\ a_n n x^{n-1} + a_{n-1} (n-1) x^{n-2} + a_{n-2} (n-2) x^{n-3} + \dots + a_2 (2) x + a_1, & \text{je-li } \text{st}(P(x)) \geq 1 \end{cases}$$

Je-li $k \in \mathbf{N}$, pak definujeme rekurentně $(k+1)$ -ní derivaci polynomu $P(x)$ jako polynom $P^{(k+1)}(x) = (P^{(k)}(x))'$.

Pozn.: Obecný vztah $(x^n)' = n x^{n-1}$.
 $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$

V.3.14.: Necht' $P(x), Q(x) \in \mathbf{R}[x]$. Pak platí:

- a) $[P(x) \pm Q(x)]' = P'(x) \pm Q'(x)$
- b) $[P(x) \cdot Q(x)]' = P'(x) \cdot Q(x) + P(x) \cdot Q'(x)$

V.3.15.: Necht' $P(x) \in \mathbf{R}[x]$, $c \in \mathbf{R}$ jeho k -násobný kořen, $k \in \mathbf{N}$. Pak platí:
 c je k -násobný kořen $P(x) \iff P(c) = P'(c) = P''(c) = \dots = P^{(k-1)}(c) = 0 \wedge P^{(k)}(c) \neq 0$.

Důsledek.: Necht' $P(x) \in \mathbf{R}[x]$, $c \in \mathbf{R}$ jeho k -násobný kořen, $k \in \mathbf{N}$, pak platí:

- a) $k = 1 \implies P'(c) \neq 0$; c není kořenem $P'(x)$.
- b) $k > 1 \implies c$ je $(k-1)$ násobným kořenem $P'(x)$.

V.3.16.: Necht' $P(x) \in \mathbf{R}[x]$, $\text{st}(P(x)) \geq 1$. Potom polynom $Q(x) \in \mathbf{R}[x]$, splňující vztah $P(x) = (P(x), P'(x)) \cdot Q(x)$, má tytéž kořeny jako $P(x)$, ale každý reálný pouze jednoduchý.

§4. Polynomické funkce

Def.: Necht' $P(x) \in \mathbf{R}[x]$ je polynom, pak funkci $f: y = P(x)$ nazveme polynomickou funkcí.

Pozn.: Konstantní, lineární a kvadratická funkce je zvláštním případem polynomické funkce.

Pozn.: a) Definičním oborem polynomické funkce je $\mathbf{R}$.

b) Jestliže $\text{st}(P(x))$ je lichý $\Rightarrow H(f) = \mathbf{R}$.

Jestliže $\text{st}(P(x))$ je sudý $\Rightarrow a_n > 0 \Rightarrow H(f) = \langle c; \infty \rangle, c \in \mathbf{R}$.

$a_n < 0 \Rightarrow H(f) = (-\infty; c), c \in \mathbf{R}$.

V.4.1.: Necht' $f: y = P(x), P(x) \neq 0(x)$ je polynomická funkce. Necht' $\text{st}(P(x)) = n$. Pak platí:

f je sudá $\Leftrightarrow 2 \mid n \wedge a_{2i-1} = 0$ pro $\forall i \in \{1; 2; \dots \frac{n}{2}\} \Leftrightarrow$ všechny koeficienty s lichým indexem $= 0$.

f je lichá $\Leftrightarrow 2 \nmid n \wedge a_{2i} = 0$ pro $\forall i \in \{1; 2; \dots \frac{n-1}{2}\} \Leftrightarrow$ všechny koeficienty se sudým indexem $= 0$.

Def.: Necht' $y = f(x)$ je polynomická funkce. Pak $c \in \mathbf{R}$ nazveme nulovým bodem polynomické funkce, právě když $f(c) = 0$.

Pozn.: a) Nulový bod polynomické funkce je kořen polynomu.

b) Hledání nulových bodů je totéž jako hledání kořenů polynomu.

Přibližné určování reálných nulových bodů polynomické funkce (reálných kořenů polynomů)